Ministerul Educaţiei şi Cercetării

Primul test de selecţie pentru OBM şi OIM
Iaşi, 19 Aprilie 2006

Soluţii şi Bareme

Subiectul 1. Fie ABC şi AMN două triunghiuri direct asemenea cu $AB = AC$ şi $AM = AN$, având interioarele disjuncte. Fie O centrul cercului circumscris triunghiului MAB. Demonstraţi că punctele O, C, N, A sunt conciclice dacă şi numai dacă triunghiul ABC este echilateral.

Soluţie. Fie $m(\angle BAC) = \alpha$. Considerăm rotaţia de centru A şi unghi α. Din ipoteză avem că B este dus în C, iar M este dus în N. Prin urmare triunghiul BAM este transformat în triunghiul CAN (din *direct* asemănare), şi implicit O este dus în O', centrul cercului circumscris triunghiului CAN. In plus avem $\angle OAO' = \alpha$ şi $OA = O'A$ 3p

Condiţia ca O, C, N, A să fie conciclice se traduce prin $O'O = OA$ (căci O' este centrul cercului circumscris triunghiului CAN). Dar $OA = O'A$, deci triunghiul $O'AO$ ar trebui să fie echilateral, prin urmare $\alpha = 60°$, şi deci triunghiurile ABC şi AMN sunt echilaterale. 3p

Relaţiile de mai sus se păstrează şi în direcţie inversă, deci problema este rezolvată. 1p

Subiectul 2. Fie p un număr prim, $p \geq 5$. Determinaţi numărul polinoamelor de forma

$$x^p + px^k + px^l + 1, \quad k > l, \quad k, l \in \{1, 2, \cdots, p-1\},$$

care sunt ireductibile în $\mathbb{Z}[X]$.

Soluţie. Fie $f_{k,l}(x) = x^p+px^k+px^l+1$, $k > l$, $k, l \in \{1, \ldots, p-1\}$. Dacă numerele k şi l au parităţi diferite, atunci $f_{k,l}(-1) = 0$. Pentru ca $f_{k,l}(x)$ să fie ireductibil în $\mathbb{Z}[X]$ este necesar ca numerele k şi l să aibă aceeaşi paritate; 1p
atunci

$$f_{k,l}(x-1) = x^p + pxg(x) + p((-1)^k + (-1)^l) = x^p + pxg(x) \pm 2p,$$

unde $g(x) \in \mathbb{Z}[X]$. 1p

Conform *Criteriului lui Eisenstein*, $f_{k,l}(x-1)$ este ireductibil în $\mathbb{Z}[X]$, deci şi $f_{k,l}(x)$ este ireductibil în $\mathbb{Z}[X]$. 4p

Prin urmare, numărul de polinoame $f_{k,l}(x)$, ireductibile în $\mathbb{Z}[X]$, este egal cu numărul de perechi (k,l), în care k,l sunt numere distincte, de aceeaşi paritate, în mulţimea $\{1,2,\ldots,p-1\}$. Numărul de astfel de perechi este

$$2\binom{\frac{p-1}{2}}{2} = \frac{(p-1)(p-3)}{4}.$$

... . 1p

Observaţie. Ideea de a face transformarea $x \mapsto x-1$ este sugerată de metoda utilizată de Gauss pentru demonstrarea ireductibilităţii polinomului ciclotomic de ordin p

$$\phi_p(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1.$$

Soluţie alternativă. Ca în soluţia anterioară observăm că dacă k şi l nu au aceeaşi paritate, polinomul $f_{k,l}(x)$ este divizibil cu $x+1$, deci nu este ireductibil.

Putem reduce modulo p, şi obţinem în $\mathbb{Z}_p[X]$ polinomul redus

$$\bar{f}_{k,l}(x) = x^p + 1 = (x+1)^p,$$

pentru că $\binom{p}{i} \equiv 0 \pmod{p}$, pentru orice $i = 1,2,\ldots,p-1$. Prin urmare, dacă $f_{k,l}(x) = g(x)h(x)$ în $\mathbb{Z}[X]$, avem, reducând în $\mathbb{Z}_p[X]$, că

$$\bar{g}(x) = (x+1)^r, \quad \bar{h}(x) = (x+1)^{p-r}, \quad 1 \le r \le p-1.$$

Revenind înapoi în $\mathbb{Z}[X]$ rezultă că există polinoamele $g_1(x)$, $h_1(x)$ în $\mathbb{Z}[X]$ astfel încât

$$g(x) = (x+1)^r + pg_1(x), \quad h(x) = (x+1)^{p-r} + ph_1(x),$$

prin urmare

$$f_{k,l}(x) = (x+1)^p + p(g_1(x)(x+1)^{p-r} + h_1(x)(x+1)^r) + p^2 g_1(x)h_1(x).$$

Luând în relaţia de mai sus $x \mapsto -1$ obţinem

$$f_{k,l}(-1) = p^2 g_1(-1)h_1(-1) = (-1)^p + p(-1)^k + p(-1)^l + 1 = \pm 2p,$$

contradicţie.

Subiectul 3. Fie a,b numere naturale nenule astfel încât pentru orice număr natural n avem $a^n + n \mid b^n + n$. Demonstraţi că $a = b$.

Soluţie. Să presupunem că $b \neq a$. Luând $n = 1$ avem că $a + 1$ divide $b + 1$, deci $b \geq a$. Fie $p > b$ un număr prim, şi fie n un număr natural cu proprietatea că

$$n \equiv 1 \pmod{p-1} \quad \text{şi} \quad n \equiv -a \pmod{p}.$$

Un astfel de n există în baza *Teoremei Chineze a Resturilor* (putem evita folosirea Teoremei Chineze a Resturilor, observând că numărul $n = (a + 1)(p - 1) + 1$ are această proprietate). 4p

Din *Teorema lui Fermat*, avem că

$$a^n = a(a^{p-1} \cdots a^{p-1}) \equiv a \pmod{p},$$

şi deci $a^n + n \equiv 0 \pmod{p}$. Deci p divide numărul $a^n + n$, deci şi pe $b^n + n$. Dar, folosind din nou Teorema lui Fermat, obţinem că $b^n + n \equiv b - a \mod p$. 2p

Rezultă că $p \mid b - a$, care este o contradicţie. 1p

Observaţie. Primul lucru care ne vine în minte este de a arăta că a şi b au aceiaşi divizori primi. Acest lucru este uşor de stabilit folosind Teorema lui Fermat sau *Teorema lui Wilson*. În orice caz nu cunoaştem nici o soluţie în spiritul acestei idei.

Pentru ca concluzia să rămână adevărată nu este suficient ca

$$a^n + n \mid b^n + n$$

să fie adevarată pentru o infinitate de valori ale lui n. Într-adevăr, dacă luăm $a = 1$ şi $b > 1$, atunci relaţia dată de divizibilitate este adevărată pentru o infinitate de valori n de forma $p - 1$, unde $p > b$ este un număr prim.

Subiectul 4. Se dau numerele reale $a_1, a_2, \ldots, a_n$, astfel încât $|a_i| \leq 1$ pentru orice $i = 1, 2, \ldots, n$ şi $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0$.

a) Arătaţi că există $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ astfel încât

$$|a_1 + 2a_2 + \cdots + ka_k| \leq \frac{2k+1}{4}.$$

b) Să se arate că pentru $n > 2$ inegalitatea nu se poate îmbunătăţi.

Soluţie. a) Putem presupune $a_1 > 0$, altfel dacă $a_1 = 0$, $k = 1$ este soluţie, iar dacă $a_1 < 0$ lucrăm cu mulţimea $\{-a_i \mid i = \overline{1, n}\}$.

Să definim $s_0 = 0$, şi $s_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} ia_i$, unde $k = 1, 2, \ldots, n$. 1p

Atunci $a_k = \dfrac{s_k - s_{k-1}}{k}$, de unde

$$0 = \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{s_n}{n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{s_k}{k(k+1)}.$$

. . . . 1p

Deoarece $s_1 = a_1 > 0$ rezultă că există (un cel mai mic) k astfel încât $s_k < 0$. Atunci

$$k \geq |ka_k| = |s_k - s_{k-1}| = s_{k-1} - s_k = |s_{k-1}| + |s_k|.$$

Dacă în acelaşi timp $|s_{k-1}| > \frac{2(k-1)+1}{4} = \frac{2k-1}{4}$, şi $|s_k| > \frac{2k+1}{4}$ rezultă

$$|s_{k-1}| + |s_k| > \frac{2k-1}{4} + \frac{2k+1}{4} = k,$$

contradicţie cu relaţia anterioară. 3p

b) Vom trata separat cazurile n impar şi n par.

Cazul I. n impar ($n > 1$). Luăm

$$\{a_i\}_{i=1,n} = \left\{\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, -1, 1, -1, 1, -1, \cdots\right\}.$$

Atunci se obţine şirul

$$\{s_i\}_{i=1,n} = \left\{\frac{3}{4}, \frac{5}{4}, -\frac{7}{4}, \frac{9}{4}, -\frac{11}{4}, \frac{13}{4}, -\frac{15}{4}, \cdots\right\}.$$

. . . . 1p

Cazul II. n par ($n > 2$). Luăm

$$\{a_i\}_{i=1,n} = \left\{1, \frac{1}{8}, -1, -\frac{1}{8}, 1, -1, 1, -1, \cdots\right\}.$$

Atunci se obţine şirul

$$\{s_i\}_{i=1,n} = \left\{1, \frac{5}{4}, -\frac{7}{4}, -\frac{9}{4}, \frac{11}{4}, -\frac{13}{4}, \frac{15}{4}, -\frac{17}{4}, \cdots\right\}.$$

. . . . 1p